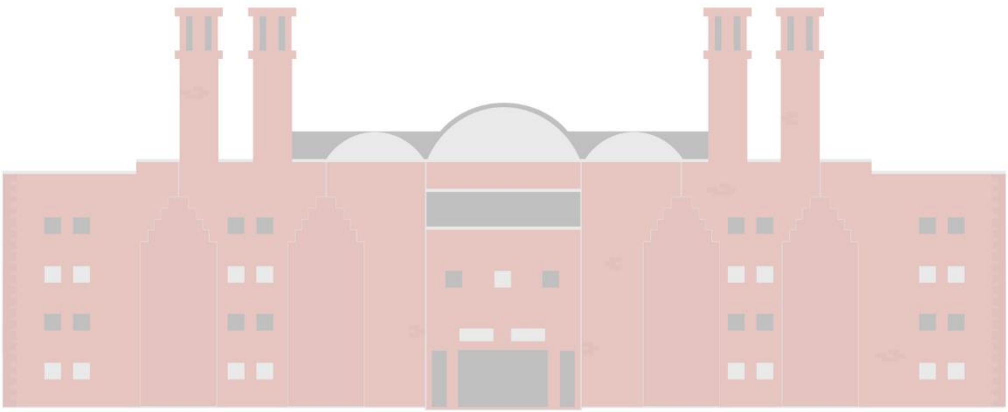
التحليل الرياضي ٣

المحاضرة الحادي عشر

6 صفحات



الدكتور: معاذ عبد المجيد .... التاريخ: 23/10/2014

يوجد نوعان للتوابع العقدية وهي:

ا. التوابع وحيدة الفرع:

- الحدودية العقدية:

$$\omega = f(x) = P_n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

$$f : ¢ \to ¢$$

$$a_0 , a_1, a_2, a_n \in ¢$$

$$z = \rho\, e^{i\varphi} \Rightarrow z^n = \rho^n\, e^{i(n\varphi)} = \rho^n \cos n\varphi \; + i\rho^n \sin n\varphi$$

$$u'_\rho = n\rho^{n-1} \cos n\varphi \quad , \quad v'_\rho = n\rho^{n-1} sin\varphi$$

$$u'_\varphi = -n\rho^n \sin n\varphi \quad , \quad v'_\varphi = n\rho^n \cos n\varphi$$

المشتق موجود ومستمر ويحقق معادلتي كوشي_ريمان

$$u'_\rho = \frac{1}{\rho} v'_\varphi \Rightarrow n\rho^{n-1} cosn\varphi = \frac{1}{\rho} n\rho^n \; cos\;\varphi$$

$$u'_\varphi = -\rho v'\rho = -n\rho^n sin\varphi = -\rho(n\rho^{n-1} sin\; n\varphi)$$

2- التابع الكسري الجبري العادي:

وهو تابع يكون فيه البسط والمقام حدوديتان مختلفتان لا يوجد بينهما عوامل مشتركة.

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

معرف على $¢ \backslash B$

$$B = \{ z : Q_m(z) = 0 \}$$

وهو تابع تحليلي في مجموعة تعريفه

3- التابع الأسي:

$$\omega = f(z) = e^z$$

$$f¢ \to ¢^* , e^z = A \quad , A \neq 0$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \; \cos y + i\, e^x \; \sin y$$

$$u'_x = e^x \cos y = v'_y = e^x \cos y$$

$$u'_y = -e^x \sin y = -v'_x = -e^x \sin y$$

$$|e^z| = e^x \quad , \quad \arg(e^z) = y$$

وهو تابع تحليلي في المستوي ¢

التابع الاسي العقدي له نفس خواص e^x وهو تابع دوري دوره $2\pi i$

$$e^{z+2\pi ik} = e^z$$

$$a^z = e^{zlna} \qquad a > 0 \neq 1$$

$\omega = e^{f(z)}$ تحليلي عندما يكون f تحليلي .

مثال: أثبت أن $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$

الحل:

$$\overline{(e^z)} = \overline{(e^x \cos y + ie^x \sin y)}$$

$$= e^x \cos y - i\, e^x \sin y$$

$$= e^x \cos(\_y) + i\, e^x \sin(\_y)$$

$$= e^x . e^{-iy}$$

$$= e^{x-iy} \qquad = e^{\bar{z}}$$

مثال: حل المعادلة $e^z = -2$

$$e^z = 2e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$z = ln(2) + i(\pi + 2\pi k)$$

4-التوابع المثلثية:

تنتسب إلى التابع الأسي لذلك كل خواص التابع الأسي تنطبق عليها .

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad ¢ \to ¢$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \quad ¢ \to ¢$$

هذه التوابع أيضاً تحليلية

تابع دوري دوره 2π

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{1}{2}\left(e^{iz+2\pi i} + e^{-iz-2\pi i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \cos z$$

ملاحظة: العلاقات المثلثية للتوابع الحقيقة تنطبق على التوابع العقدية.

$$(\cos z)' = -\sin z \quad , \quad \overline{\cos z} = \cos \bar{z}$$

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x$$

$$\cos iy = \frac{1}{2}\left(e^{iiy} + e^{-iiy}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y} + e^{+y}\right) = \cosh y$$

$$\sin iy = \frac{1}{2i}\left(e^{-y} - e^{y}\right) = -\frac{1}{i}\left[\frac{1}{2}\left(e^{y} - e^{-y}\right)\right] = \sinh y$$

نعوض:

$$\sin z = \sin x \; sh\; y + i \; sh\; y \cos x$$

$$\cos z = \cos x \;\; ch\; y - i \sin x \; sh\;\; y$$

مثال: برهن صحة المعادلة: $\cos\left[i \ln\left(5 \pm 2\sqrt{6}\right)\right] = 5$

$$\cos\left[i \ln\left(5 \pm 2\sqrt{6}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[e^{\ln\left(5\pm 2\sqrt{6}\right)} + \mathrm{e}^{-\ln\left(5\pm 2\sqrt{6}\right)}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left(5 \pm 2\sqrt{6} + \frac{1}{5 \pm 2\sqrt{6}}\right) = 5$$

5-التوابع القطعية: تنسب للتابع الأسي

$$ch\ z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) : ¢ \to ¢$$

$$sh\ z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) : ¢ \to ¢$$

التوابع القطعية الحقيقية ليست دورية ولكن هنا دورية ودوره 2π

$$\cos(iz) = \frac{1}{2}\left(e^{i^2 z} + e^{-i^2 z}\right) = \frac{1}{2}(e^{-z} + e^{z})$$

$$\Rightarrow \cos(iz) = ch\ z \quad , \quad ch\ (iz) = \cos z$$

$$\Rightarrow \sin(iz) = i\ sh\ z \quad , \quad sh(iz) = -i \sin z$$

مثال: حل المعادلة: $\boldsymbol{sinh\ (z) = 0}$

$$\sinh(z) = -i \sin iz = 0 \Rightarrow \sin iz = 0$$

$$iz = \pi k \Rightarrow z = \frac{\pi k}{i} = i\pi k : k \in \mathbb{Z}$$

ملاحظة: تسمى التوابع الخمسة السابقة توابع وحيدة الفرع أولية وكل التوابع وحيدة الفرع هي تركيب لهذه التوابع.

٢. التوابع المتعددة الفروع:

١- التابع الجذري: $\omega = z^{\frac{1}{n}} \quad , \quad n \in N^*/\{1\}$

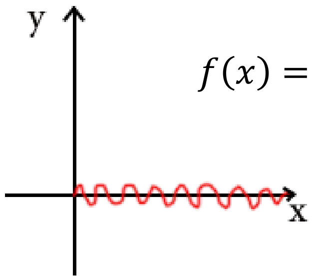
وهو تابع عكسي للتابع $: ¢ \to ¢ \quad z = \omega^{n}$

متعددة الفروع (عددها n) نقطة تفرعه z=0

$$z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)} \quad : \quad k \in \mathbb{Z}$$

الفرع الرئيسي عندما $k = 0 \Leftarrow z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\varphi}{n}}$

وهو تحليلي في المستوى العقدي باستثناء نقطة ومستقيم التفرع.



مستقيم التفرع: نصف مستقيم منبعث من نقطة التفرع إلى اللانهاية بأي اتجاه كان. $f(x) =$

$[g(x)]^{\frac{1}{n}}$ معرف عندما يكون g معرف

إذا كان g وحيد الفرع فأن نقاط تفرع f هي حلول المعادلة g(z)=0

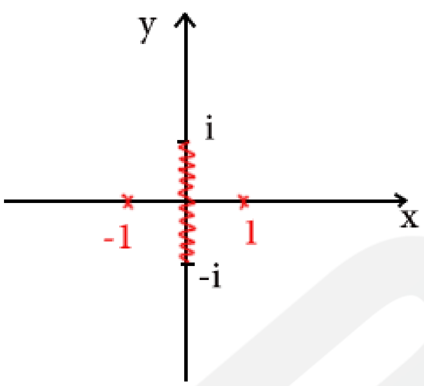
عدد الفروع n

إذا كان g متعدد الفروع نقاط تفرع f هي نقاط تفرع g مضاف إليها حلول المعادلة g(z)=0

مثال:

أوجد المنطقة التي يكون فيها هذا التابع تحليلياً:

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{z^2+1}{z^2-1}}$$



معرف على $¢\backslash\{-i\}$

متعددة الفروع عدد فروعه 3

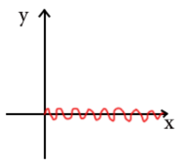
نقاط التفرع: $z^2+1=0 \Rightarrow z=\pm i$

٢- التابع اللوغاريتمي:

$$\omega = \ln z \Leftrightarrow z = e^\wedge\omega$$

$$\ln z : ¢ \rightarrow ¢$$

Z=0 نقطة شاذة ونقطة تفرعه 0 (وعدد الفروع ∞)



مشتقه: $(\ln z)' = \frac{1}{z}$

التابع اللوغاريتمي العام $w = \ln[g(z)]$ معرف عندما يكون g معرف و $g(z) \neq 0$

نميز الحالتين :

I-g(x) **غير كسري:** نقاط تفرع w هي نقاط تفرع g(z) وحلول المعادلة g(z)=0

II- $g(x) = \frac{f(z)}{k(z)}$ **كسري:** نقاط التفرع g وحلول المعادلتين : $\ln(z) = 0 \ , k(z) = 0$

مثال:

أوجد نقاط تفرع للتابع $\boldsymbol{\omega = \ln[2z + \sqrt{z^2 + 3}]}$

نقاط تفرع الجذر $z^2 + 3 = 0 \Rightarrow z = \pm i\sqrt{3}$

$$2z + \sqrt{z^2 + 3} = 0$$

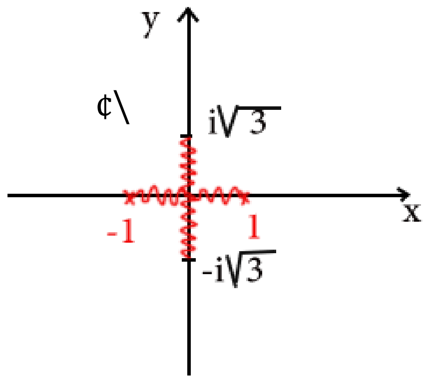
$$\sqrt{z^2 + 3} = -2z$$

$$z^2 + 3 = 4z^2 \Rightarrow 3 = 3z^2$$

$$z = \pm 1$$

نقاط تفرع لـω هي $\pm 1 \quad \pm i\sqrt{3}$

ومعرف على $\{-i\}$



تصويبات المحاضرة العاشرة:

الصفحة الثانية _ السطر الأول :

الخطأ: $\grave{u}_y = -2y - 1 = \grave{v}_x \ldots 2$

الصواب: $\grave{u}_y = -2y - 1 = -\grave{v}_x \ldots 2$

السطر الثاني:

الخطأ: $= 2xy + \grave{h}(x)$

الصواب: $= 2xy + h(x)$

النجاح معلم سيىء أحياناً، إذ أنه يجعل الأذكياء يظنون أنهم لا يخسرون.

بيل غيتس